www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MINISTERE DE L'INDUSTRIE
ET DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES D'ALES

CONCOURS D'ADMISSION 1990

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

N.B. : Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.

Les règles à calcul, tables de logarithmes et tables trigonométriques sans formulaire, ainsi que les calculatrices électroniques portatives autonomes non imprimantes sont autorisées.

Toute autre documentation est interdite.

PROBLEME 1 Ce problème comprend 3 parties.

Première partie - Questions préliminaires.

1°) On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par : $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$

a) Etablir une relation de récurrence liant a_n et a_{n+2}.

b) En déduire, pour $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$: $a_{2p} = \frac{1.3.5... (2p - 1)}{2.4.6... (2p)} \cdot \frac{\pi}{2}$

Préciser la valeur de a_{2p} pour $p \in \{1 ; 2 ; 3\}$

2°) Dans cette question, on se propose de déterminer, pour $u \in [0 ; 1]$, un encadrement de la fonction :

$$u \mapsto \sqrt{1 - u}$$

a) Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par : $g(u) = 1 - \frac{1}{2} u - \frac{1}{8} u^2 + \sqrt{1 - u}$

Etudier les variations de g ; en déduire un encadrement de g (u) pour $u \in [0 ; 1]$.

b) Soit h la fonction définie sur [0 ; 1] par : $h(u) = 1 - \frac{1}{2} u - \frac{1}{8} u^2 - \sqrt{1 - u}$

Démontrer : $\forall u \in [0 ; 1], 0 \leq \frac{1}{16} u^3 \leq h(u) \leq \frac{3}{8} u^3$

c) Déduire de ce qui précède un encadrement de $\sqrt{1 - u}$ pour $u \in [0 ; 1]$

Deuxième partie

On considère la fonction f définie sur [- 1 ; 1] par : $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t} \, dt$

L'objet de cette partie est l'étude de f et la construction de sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 10 cm).

•••/•••

1°) Déduire des résultats de la première partie que l'on a pour tout réel $x \in [-1 ; 1]$:

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{64}x^4 - \frac{15}{128}x^6\right) \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{64}x^4 - \frac{5}{256}x^6\right)$$

2°) a) Calculer f (0) et f (1).

b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de f (x), dont on précisera l'amplitude, pour :

$$x \in \left\{\frac{1}{2} ; \frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

3°) a) Etablir que f est paire et que

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}\, dt$$

b) Démontrer que f est continue sur $[-1 ; 1]$

c) Pour tout couple de réels $(x_1 ; x_2)$, $x_1 \in [0 ; 1]$, $x_2 \in [0 ; 1]$, $x_1 < x_2$, comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$; en déduire le sens de variation de f.

4°) Déterminer le développement limité de f, à l'ordre 5, au voisinage de 0 ; préciser f ' (0).

5°) Donner le tableau de variations de f et construire (C).

Troisième partie Cette partie propose des applications de l'étude précédente ; les résultats seront exprimés en utilisant la fonction f étudiée dans la deuxième partie.

1°) On considère l'ellipse définie paramétriquement par :

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \qquad t \in [0 ; 2\pi], \quad 0 < b < a$$

a) e désignant l'excentricité de l'ellipse, démontrer que sa longueur L est donnée par :

$$L = 4\, a\, f(e)$$

b) Donner une valeur approchée de L pour $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$.

2°) Soit x un réel de $]0 ; 1[$. On considère la fonction F définie sur $[0 ; x[$ par :

$$F(X) = \int_0^X \sqrt{\frac{1 - t^2}{x^2 - t^2}}\, dt$$

En utilisant le changement de variable défini par $t = x \sin\theta$ et $\theta \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$, établir : $\lim F(X) = f(x)$.

Application : $\alpha \in [0 ; 1[$ Déterminer : $\lim_{\alpha \to 1^-} \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{3 - u^2}{1 - u^2}}\, du$ $\quad X \to x^-$

3°) Exprimer à l'aide de f l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2 t}\, dt$$

.../...

PROBLEME 2

Ce problème comprend 3 parties.

Première partie

On désigne par $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels d'ordre 3 et, respectivement, par $\mathcal{M}_S$ et $\mathcal{M}_{AS}$ les sous-ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}$.

1°) Montrer que $\mathcal{M}_S$ et $\mathcal{M}_{AS}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$; on précisera une base de chacun d'eux.

2°) Montrer que $\mathcal{M}_S$ et $\mathcal{M}_{AS}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}$.

Deuxième partie

Soit E un espace vectoriel euclidien de base orthonormale directe $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On note $\vec{n}$ le vecteur de E de composantes (a, b, c) suivant B et de norme 1.

On désigne par f l'application telle que :

$f : E \longrightarrow E$

$\vec{x} \longmapsto \vec{x} \wedge \vec{n}$ ($\wedge$ désigne le produit vectoriel)

1°) Montrer que f est un endomorphisme de E.

2°) Déterminer le noyau, le rang et l'image de f.

3°) a) Construire la matrice F de f relative à la base B.

b) Vérifier que F est un élément de $\mathcal{M}_{AS}$.

c) Calculer F^2, vérifier que F^2 est un élément de $\mathcal{M}_S$.

d) Exprimer F^3 en fonction de F et en déduire une relation vectorielle liant les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{x}$ de E.

e) A l'aide de la formule du "double produit vectoriel" :

$$\forall (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) \in E^3 \quad \vec{X} \wedge (\vec{Y} \wedge \vec{Z}) = (\vec{X} \cdot \vec{Z})\,\vec{Y} - (\vec{X} \cdot \vec{Y})\,\vec{Z}$$

retrouver la relation vectorielle établie au 3°d).

.../...

4°) Soit λ un réel non nul.

a) Montrer que la matrice $M = \lambda I + F$ est inversible, I désignant la matrice unité de E.

b) Déterminer les réels α, β et γ en fonction de λ de façon que :

$$M^{-1} = \alpha I + \beta F + \gamma F^2$$

c) En déduire que les matrices $(\lambda I + F)^{-1}$ et $(\lambda I - F)$ commutent.

Troisième partie

Pour tout réel λ non nul, on note g_λ l'endomorphisme de E qui, par rapport à la base B, a pour matrice : $A_\lambda = (\lambda I + F)^{-1} (\lambda I - F)$.

1°) Déterminer les vecteurs invariants par g_λ.

2°) a) Montrer que A_λ est inversible.

b) Montrer que A_λ est une matrice orthogonale. En déduire la nature de l'isométrie vectorielle g_λ.

3°) Montrer que $I + A_\lambda$ est inversible et que l'on a :

$$F = \lambda (I - A_\lambda) [(I + A_\lambda)^{-1}]$$

4°) Exprimer A_λ en fonction de λ, I, F et F^2.

5°) On pose $\lambda = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right)$, où $0 < |\theta| < \pi$.

a) On suppose $b = c = 0$. Caractériser alors g_λ.

b) On suppose maintenant b et c non tous deux nuls, montrer qu'alors les vecteurs $\vec{u_1} = \vec{n}$, $\vec{u_2} = f(\vec{e_1})$ et $\vec{u_3} = -f^2(\vec{e_1})$ forment une nouvelle base de E. Ecrire les matrices des endomorphismes f et g_λ par rapport à cette nouvelle base.

6°) Soit λ_1 et λ_2 deux réels non nuls tels que $\lambda_1 + \lambda_2$ et $1 - \lambda_1 \lambda_2$ soient non nuls. Montrer qu'il existe un réel λ non nul tel que :

$g_\lambda = g_{\lambda_1} \circ g_{\lambda_2}$ et calculer λ en fonction de λ_1 et λ_2.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail